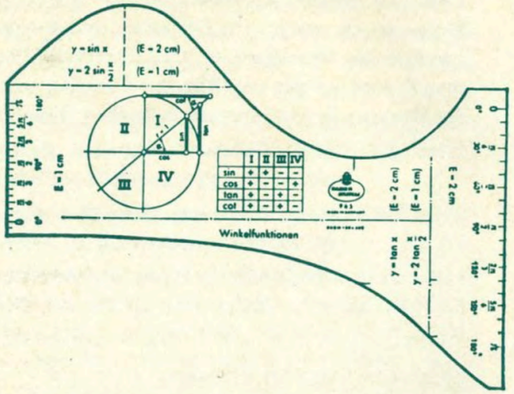
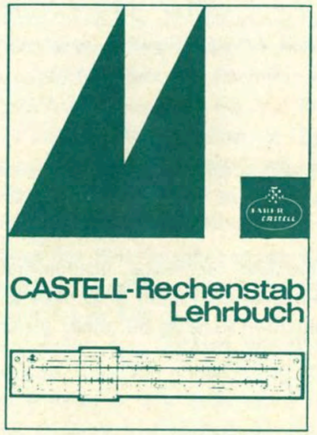
Sinus-Tangens-Schablone 945

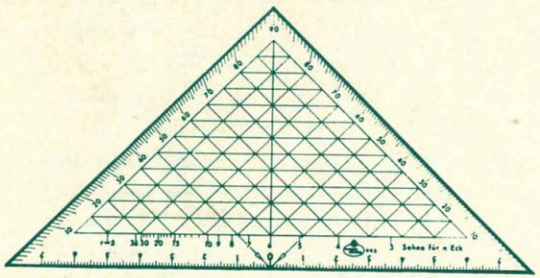
Diese Zeichenschablone aus grünem, durchsichtigen Celluloid dient dem mathematischen Zeichnen an Höheren Schulen und Fachschulen. Sie ist ein Spezialgerät zum Zeichnen von Kurven der Kreisfunktionen und enthält neben den Maßstäben für die Abszissenteilung in Grad und Bogenmaß auch ein Schema über den Funktionsverlauf.
Unter der Nr. 945 D auch als Wandtafelgerät verfügbar.





Castell-Rechenstab-Lehrbuch

soeben in 13. erweiterter
Auflage erschienen.
Format DIN A 5,
Umfang 150 Seiten.
Bestellnummer 1/700 d
Alleinvertrieb im Bundesgebiet durch
J. Lindauer-Verlag
München-2, Kautingerstraße 29



Kombi-Winkel 993

Ein Universalgerät für Schüler und Studenten. In diesem gründurchsichtigen und maßbeständigen Zeichenwinkel sind Maßstab, Parallel-Lineal, Dreieck, Winkelmesser und Vieleckzeichner zweckmäßig verbunden.
Das Wandtafelgerät hat die Nr. 993 D.

A. W. FABER-CASTELL, STEIN BEI NÜRNBERG

11

1967

FABER-CASTELL

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan

Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Eine Einführung in das Stabrechnen in der Quarta

von Studienrat Helmut Rixecker

In einem früheren Aufsatz (Rechenstabbrief 8/1964) habe ich über eine Einführung des Stabrechnens in der Untersekunda berichtet. Ich habe geschildert, wie man in einfacher Weise eine logarithmische Skala berechnen und mit diesen Kenntnissen das Stabrechnen methodisch begründen kann.

In dem folgenden Aufsatz soll gezeigt werden, daß der Rechenstab wie kaum ein anderes Hilfsmittel dazu geeignet ist, im Unterstufenunterricht grundlegende mathematische Betrachtungsweisen zu demonstrieren und praktisch anzuwenden.

Seit über einem Jahrhundert bestimmen Dreisatzaufgaben im direkten und umgekehrten Verhältnis das Rechnen in der Quarta. Es handelt sich dabei um die quotienten- oder produkttreue Verknüpfung zweier Größen, für deren zusammengehörige Größenpaare x, y entweder $x : y = \text{const}$ oder $x \cdot y = \text{const}$ gilt. Diese Verknüpfungen stellen die in der Praxis häufigsten funktionalen Zusammenhänge dar. Das moderne mathematische Denken, das in Strukturen und Abbildungen seine angemessene Darstellungsweise sieht, findet hier eine reiche Anwendungsmöglichkeit. Die umkehrbar-eindeutige Zuordnung der Mengen (x) und (y) für $x : y = c$, bzw. $x \cdot y = c$, wird am Rechenstab durch die Zuordnung der Grundskalen, bzw. der Grundskala zur Reziprokskala sinnfällig. Es ist noch keineswegs in das allgemeine Bewußtsein gedrungen und bedarf daher der nachdrücklichen Erwähnung, daß diese lückenlose Zuordnung erst durch die Einführung der versetzten Skalen ermöglicht wurde. **Die Einführung der versetzten Skalen ist eine Großtat in der Geschichte des Rechenstabes.** Die folgenden Ausführungen mögen diese Behauptung stützen.

Der ideale Rechenstab für die Quarta enthält nur die Grundskalen C, D, die versetzten Skalen CF, DF und die reziproken Skalen CI und CIF. Da die Quartaner aber bald Tertianer und Sekundaner werden, wird kein vernünftiger Fabrikant auf die Quadratskalen und trigonometrischen Skalen verzichten. Die Bedürfnisse der Oberstufe werden auch stets die doppellogarithmischen Skalen erfordern, auch die Kuben finden noch Platz. Die Verwendung zusätzlicher Marken, wie $M = 1 : \pi$, $c = \sqrt{2 : \pi}$ usw., ist umstritten, keineswegs aber störend. Eine Sinusskala auf der Zunge ist erwünscht, wenn man sphärische Trigonometrie betreibt; wo wird dies bei uns aber noch getan?

Der Rechenstab ist ein Arbeitsgerät. Seine richtige Handhabung sichert erst den Erfolg der Arbeit. Die Arbeitsanleitung für den Rechenstab muß von Anfang an die Benutzung der versetzten Skalen vorsehen, denn sie geben keine zusätzliche, sondern eine fundamentale Arbeitsmöglichkeit.

Zunächst muß der Schüler mit den ungewohnten logarithmischen Skalen vertraut gemacht werden. Dies geschieht durch Einstell- und Ableseübungen auf allen Grundskalen. Die Kontrolle geschieht durch Vergleich mit der äquidistanten Skala L. Alsdann wird man auf die Kongruenz der Grundskalen hinweisen.

Wenn die Zunge bewegt wird, steht jede Marke des Zungenrandes (d. h. auf den Skalen C und CF), etwa die 1, **derselben** Zahl auf dem Körper (d. h. auf den Skalen D und DF) gegenüber. Stellt man die Zahl 1 der Zunge etwa zur Zahl 1,1 des Körpers — was automatisch auf C und D sowie auf CF und DF geschieht — so liest man bei der Zahl 2 der Zunge am Körper 2,2 ab, bei 3 der Zunge (diesmal nur auf C) am Körper 3,3, bei 4 der Zunge am Körper 4,4 usw. Bei einigen weiteren Einstellübungen wird das „Springen" von den Grundskalen C und D zu den versetzten Skalen CF und DF und umgekehrt geübt. Spielend lernt der Schüler, daß bei allen diesen Einstellungen **alle** Vielfachen einer Zahl mit einer Zungenstellung abgelesen werden können, wenn die Zunge nicht mehr als halb herausgezogen wird. Es folgen Aufgaben der Art „Multipliziere 2,85 mit 3,4, mit 5,3, mit 7,29 usw.". Erst wenn solche **Folgen** von Produkten hinreichend geübt sind, sollte man **Einzel**produkte ablesen lassen.

Der Übergang zur Division ist nicht schwer, denn die Aufgabe $a \cdot x = y$ läßt sich auch als $a = y : x$ lesen. Der Schüler erkennt, daß der Dividend auf dem Körper (auf D oder DF) und der Divisor auf der Zunge (auf C oder CF) sich gegenüberstehen müssen, damit man gegenüber der 1 der Zunge auf dem Körper den Quotienten ablesen kann.

Zwanglos kann man die Lösung von Dreisatzaufgaben im direkten Verhältnis anschließen. Dabei kann man entweder den althergebrachten Dreischritt vom Vielfachen zur Einheit und von dort zum neuen Vielfachen machen oder die moderne Auffassung quotiententreuer Größen verwirklichen, in jedem Fall steht der Zahlenbereich der einen Größe auf der Zunge dem der anderen Größe auf dem Körper gegenüber. Die Schüler begreifen das sehr schnell und lösen Dreisatzaufgaben mit verblüffender Geschwindigkeit und großem Vergnügen.

Für quotiententreue Größen, d. h. solche, die im direkten Verhältnis stehen, gehört zum Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, ... der einen Größe das Doppelte, Dreifache, Vierfache, ... der andern. Bei produkttreuen Größen, d. h. solchen, die im umgekehrten Verhältnis stehen, gehört zum Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, ... der einen Größe die Hälfte, das Drittel, Viertel, ... der andern. Das Wachsen der einen Größe bedeutet ein Abnehmen der andern. Die Anordnung der rotgedruckten rückläufigen oder inversen Skalen legt den Versuch nahe, sie zur Darstellung dieses funktionalen Zusammenhanges zu benutzen. Einige Beispiele beweisen, daß der Stab diesen funktionalen Zusammenhang richtig wiedergibt. Es folgt die Erkenntnis, daß bei produkttreuen Größen die eine Größe auf dem Körper der anderen — rot gezeichneten — auf der Zunge gegenübersteht. Wenn keine CIF-Skala vorhanden ist, muß man entweder das Durchstoßen der Zunge behandeln oder zuerst das konstante Produkt und dann einen Quotienten berechnen.

Hier soll eine sachliche Schwierigkeit nicht verschwiegen werden. Die herkömmlichen Dreisatzaufgaben zum umgekehrten Verhältnis eignen sich meistens wenig zum Darstellen des funktionalen Zusammenhangs, da entweder die eine Größe nur für natürliche Maßzahlen definiert ist (5 Arbeiter graben ein Loch in 3 Tagen, ... 8 Pferde reichen mit einem Futtervorrat 6 Wochen, ...) oder beide Größen von derselben Art sind (Verwandle ein Rechteck von 15 m Breite und 40 m Länge ...) oder aber die eine Größe als Quotient zweier Größen definiert ist (Ein Auto legt in 6 Stunden mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h eine gewisse Strecke zurück, wie lange braucht es für dieselbe Strecke ...). Bessere Beispiele würde die elektrische Energie in kWh liefern. Vielleicht sind in naher Zukunft schon Zählerautomaten in Betrieb und den Schülern bekannt, die beim Einwurf einer Münze eine konstante Energieportion abgeben, wobei Zeit und Leistung kontinuierlich-variable Größen sind, die sich zur methodischen Einführung besser eignen als die oben angeführten Beispiele der althergebrachten Schulbuchaufgaben.

Wie sollen zusammengesetzte Dreisatzaufgaben, bei denen drei und mehr Größen im Spiel sind, im Sinne des dargestellten methodischen Weges behandelt werden? Hier ist wohl zu empfehlen, zuerst die Konstanten $x \cdot y \cdot z$, bzw. $(x \cdot y) : z$, bzw. $x : (y \cdot z)$ usw. zu berechnen. Diese Konstanten haben häufig eigene Namen, wie spezifische Wärme, Förderleistung usw. Wie dies im Einzelnen methodisch durchgeführt werden kann, soll andernorts erörtert werden.

Verfeinerte Newtonsche Iterationsverfahren beim Rechenstabrechnen

von H. Jehle, Furtwangen (Schwarzwald)

1. Verfeinerungen des Newtonschen Iterationsverfahrens.

Es sei eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $y = f(x)$ mit der Nullstelle a gegeben und es sei $f'(a) \neq 0$. Ein geeignetes abgeschlossenes Intervall, welches a in seinem Innern enthält, bezeichnen wir mit U und unter x_0 verstehen wir einen genügend genauen Näherungswert von a (U und x_0 braucht in der Folge nicht immer das gleiche abgeschlossene Intervall bzw. der gleiche Näherungswert zu sein). Ferner lassen wir der Einfachheit halber in den folgenden Formeln das Argument x teilweise weg. Aus der Voraussetzung über f' folgt, daß $f' \neq 0$ in U ist. Die von

$$N(x) = x - f \cdot (f')^{-1}$$

erzeugte Folge x_0, $x_1 = N(x_0)$, $x_2 = N(x_1), \ldots$

konvergiert bekanntlich quadratisch gegen a, denn a ist Nullstelle von

$$N'(x) = f \cdot (f')^{-2} \cdot f''.$$

Betrachten wir $N_1(x) = N(x) - \frac{f^2}{2} (f')^{-3} \cdot f''$,

so gilt $$N'_1(x) = -\frac{f^2}{2}[-3\,(f')^{-4} \cdot (f'')^2 + (f')^{-3} \cdot f'''].$$

Betrachten wir weiter

$$N_2(x) = N_1(x) + \frac{f^3}{6}\,(f')^{-1}\,[-3\,(f')^{-4} \cdot (f'')^2 + (f')^{-3} \cdot f'''],$$

so erhalten wir

$$N'_2(x) = \frac{f^3}{6}\, R_1(x),$$

wobei $R_1(x)$ die Ableitung einer gebrochenen rationalen Funktion ist, bei welcher nur Nenner auftreten, die Potenzen von f' sind. Infolgedessen hat $R_1(x)$ die gleiche Eigenschaft und ist sicher in U beschränkt. Deshalb hat N'_2 in a eine dreifache Nullstelle. Setzt man N_1 und N in N_2 ein, so erhält man den bekannten Ausdruck

$$N_2(x) = x - \frac{f}{f'} - \frac{f^2}{(f')^3} \cdot \frac{f''}{2} - \frac{f^3}{(f')^5} \cdot \frac{(f'')^2}{2} + \frac{f^3}{(f')^4} \cdot \frac{f'''}{6}$$

2. Eine für das Rechenstabrechnen geeignete Formel.

Wenn man von x_0 ausgehend mit Hilfe von N_2 die Nullstelle a iterativ berechnet, erhält man zwar eine rasch konvergierende Folge, aber die einzelnen Glieder sind auch mit dem Rechenstab umständlich zu berechnen. Einfacher wird die Rechnung, wenn wir die Funktion

$$P(x) = x - \frac{f}{f'} \cdot \frac{f' - \frac{f}{f'} \cdot \frac{f''}{2}}{f' - \frac{f}{f'} \cdot f'' + \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \cdot \frac{f'''}{6}}$$

verwenden. Dividieren wir beim zweiten Bruch Zähler und Nenner durch f' und entwickeln dann den Nenner in eine geometrische Reihe (die sicher konvergiert, wenn nur x nahe genug bei a liegt), so erhalten wir

$$P(x) = N_2(x) + f^4 \cdot R_2(x),$$

wobei $R_2(x)$ in U differenzierbar ist. Da auch $P'(x)$ in a eine dreifache Nullstelle hat, gilt

$$P(x) = a + (x - a)^4 R_3(x)$$

mit $|R_3(x)| < c$ in U. Für die Glieder der Folge

$$x_0,$$

$$x_\nu = P(x_{\nu-1}) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gilt $\quad |x_\nu - a| < |x_{\nu-1} - a|^4 \cdot c,$

sie konvergiert daher sehr rasch gegen a.

Wenn f, f', $\frac{f''}{2}$ und $\frac{f'''}{6}$ gegeben sind, dann ist P(x) mit Hilfe des Rechenstabes leicht zu berechnen. Die Verwendung von P(x) zur iterativen Berechnung von a lohnt sich jedoch nur, wenn man die erforderlichen Ableitungen auf einfache Weise erhält. Dies ist bei Polynomen der Fall, sofern man die Ableitungen mit dem Horner-Schema berechnet.

3. **Beispiel.** Wir wollen die reelle Nullstelle von

$$y = 4x^3 - 6x^2 + 30x - 45$$

bestimmen, wobei wir als Ausgangswert $x_0 = 2$ nehmen. Dabei setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{f}{f'} = h, \quad \frac{f}{f'} \cdot \frac{f''}{2} = k, \quad \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \cdot \frac{f'''}{6} = m$$

und

$$\frac{f}{f'} \cdot \frac{f' - \frac{f}{f'} \cdot \frac{f''}{2}}{f' - \frac{f}{f'} \cdot f'' + \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \cdot \frac{f'''}{6}} = h \cdot \frac{f' - k}{f' - 2k + m} = n$$

Hat man f', $\frac{f''}{2}$ und $\frac{f'''}{6}$ berechnet, dann genügt zur Berechnung von k, m und n im allgemeinen die eine Rechenstabeinstellung $\frac{f}{f'}$. In unserem Beispiel ergibt sich:

$x_0 =$	2	4	—6	30	—45	
			8	4	68	
		4	2	34	23	= f
			8	20		
		4	10	54	= f'	
			8	—7,66	= —k	
		4	$18 = \frac{f''}{2}$	46,34	= f'—k	
				38,68	= f'—2 k	
		$4 = \frac{f'''}{6}$		0,73	= m	
— n =	—0,500			39,41	= f'—2 k + m	
$x_1 =$	1,500					

Man erhält schon nach dem ersten Schritt die Nullstelle 1,500, während das gewöhnliche Newtonsche Iterationsverfahren mit demselben Ausgangswert $x_1 = 1{,}57$, $x_2 = 1{,}501$ liefert.

4. **Schlußbemerkung.** Wenn $\frac{f}{f'}$ einen sehr kleinen Wert hat, dann kann man i. a. das 3. Glied im Nenner von P(x) vernachlässigen und erhält den Ausdruck

$$M(x) = x - \frac{f}{f'} \cdot \frac{f' - \frac{f}{f'} \cdot \frac{f''}{2}}{f' - \frac{f}{f'} \cdot f''}$$

den man ebenfalls zur Berechnung von a verwenden kann. Dieser läßt auch eine geometrische Deutung zu. Betrachtet man nämlich die Funktion $F(x) = \frac{f}{f'}$ und legt durch $P(x_0 / F(x_0))$ sowohl die Sekante mit der Steigung 1 als auch die Tangente an $y = F(x)$, und bestimmt die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der x-Achse, so schließen diese die Nullstelle a ein und ihr Mittelpunkt ist $M(x_0)$ [1]).

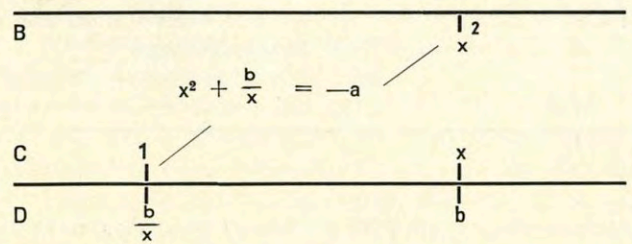
[1]) Man vergleiche: Jehle, H. Das Einschließen einer Nullstelle mit dem Newtonschen Näherungsverfahren. MNU. 1963, Bd. 16. Heft 4, S. 148-149.

Die Lösung kubischer Gleichungen mit dem Novo-Duplex 2/83

von Ing. H. Bachmann

Im Heft 2 (1961) dieser Schriftenreihe ist die Lösung der kubischen Gleichung mit dem Rechenstab unter Verwendung der reziproken Grundskala erläutert. Diese Abhandlung hat die Meinung aufkommen lassen, daß eine Lösung mit dem Rechenstab ohne Reziprokskala nicht möglich ist. Eine einfache Überlegung läßt jedoch erkennen, daß man bei Festlegung des x-freien Gliedes b mit dem Läufer und entsprechender Schieberbewegung auf einem Rechenstab ohne Reziprokskala in ebenso einfacher und übersichtlicher Weise zurechtkommt.

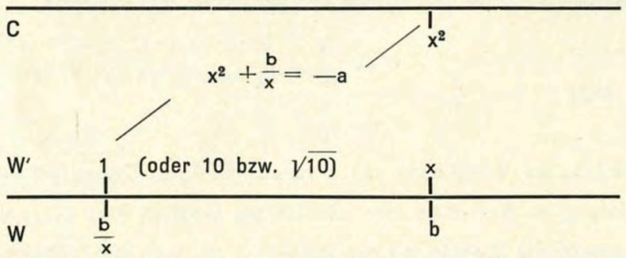
Bringt man, wie bereits früher erwähnt, die reduzierte kubische Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ in die für das Stabrechnen günstige Form $x^2 + \frac{b}{x} = -a$, so erkennt man, daß bei der Einstellung Cx über Db bei C 1 (oder C 10) auf D der Wert $\frac{b}{x}$ und auf der B-Skala der Wert x^2 sein muß.



Man braucht somit nur den Wert b auf der D-Skala mit dem Läufer festhalten und den

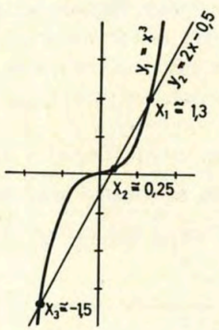
Schieber so lange verschieben bis x^2 auf der B-Skala zuzüglich des Wertes $\frac{b}{x}$ unter C 1 (oder C 10) auf der D-Skala den Wert —a ergibt.

Da auf dem Novo-Duplex 2/83 die W-Skalen der Grundskala und die C-Skala der beweglichen Quadratskala entsprechen und diese beiden Skalen auf einer Stabseite liegen, läßt sich dieses Rechenschema auch auf dem Novo-Duplex sehr übersichtlich anwenden.



Man stellt den Läufer auf der W-Skala entsprechend dem Werte b ein.
Dann verschiebt man den Schieber so lange bis die Summe des Wertes x^2 auf der C-Skala und des Wertes $\frac{b}{x}$ bei W' 1 (oder 10 bzw. $\sqrt{10}$) auf der W-Skala den Wert —a erreicht.

Wie bereits früher erwähnt, bewährt sich diese Methode besonders zur Verbesserung der aus dem graphischen Lösungsverfahren ermittelten Wurzelwerten. Da das graphische Verfahren stets einen Überblick über die Größenordnung und das Vorzeichen der Wurzeln gibt, ist es in den meisten Fällen einfacher anzuwenden (oft genügt eine gedankliche Darstellung des Bildes), als die Untersuchung durch die Ermittlung der Diskriminanten $\triangle = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$.



Es sei dies nachstehend an einem Beispiel praktisch aufgezeigt:

$$x^3 - 2x + 0,5 = 0$$

Für die graphische Darstellung wird:

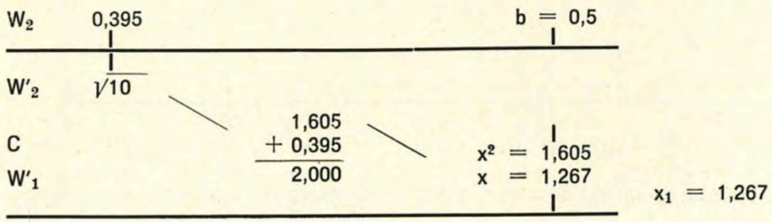
$$x^3 = 2x - 0,5 \text{ also}$$
$$y_1 = x^3 \text{ und}$$
$$y_2 = 2x - 0,5$$

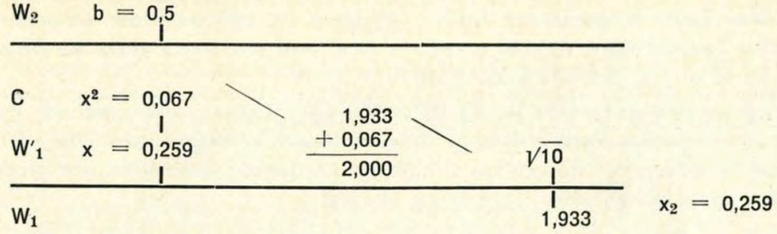
siehe Fig.

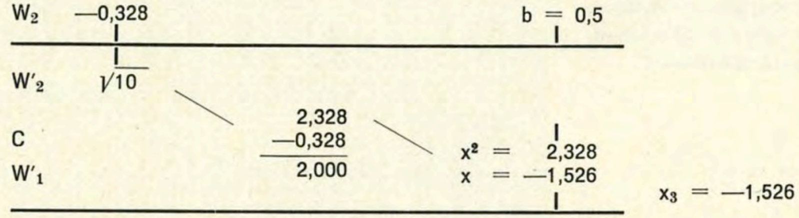
Für den Rechenstab wird:

$$x^2 + \frac{0,5}{x} = 2$$

Die drei Wurzeln erhält man mit folgenden Stabeinstellungen:







Da die Größenordnungen und die Vorzeichen der Wurzeln aus der graphischen Darstellung bekannt sind, ist die Einstellung und Ablesung der Werte verhältnismäßig einfach. Zu beachten ist auch hierbei wieder der für die Wurzelskalen allgemein geltende Grundsatz:

Zahleneinstellungen (b und x) auf aneinanderliegenden Skalen ergibt den Quotienten $\left(\frac{b}{x}\right)$ bei 1 bzw. 10.

Zahleneinstellungen (b und x) auf gegenüberliegenden Skalen ergibt den Quotienten $\left(\frac{b}{x}\right)$ bei $\sqrt{10}$ (rote Marke).

Zinsenberechnung

von Ing. Rudolf Huber, Steyr/Österreich

So vorteilhaft sich die Berechnung der Tageszinsen auf einem Stab erweist, der eine um 36 versetzte Grundskala besitzt, so schwierig gestaltet sich die Rechendurchführung in der Praxis. Man nehme einmal folgendes Beispiel an: Gegeben sind Ausleih- und Rückgabedatum (wobei das Jahr mit 365 Tagen angenommen wird und die Zählung der Tage mit dem ersten Ausleihtag beginnt), Zinsfuß und Zinsenertrag; wenn nun das Kapital zu errechnen ist, dann ist die Berechnung viel umständlicher und hindernisreicher, als es die vorteilhafte Rechendurchführung am Stab erwarten läßt. Dem Rechner erwachsen demnach in der Praxis folgende Schwierigkeiten:

1. Die Berechnung der Ausleihtage ist umständlich.
2. Der Stellenwert des zu erwartenden Resultats macht Schwierigkeiten.
3. Die Rechendurchführung auf dem Stabe ist ohne Hinweise kaum durchführbar.

Wenn für die Überwindung dieser Schwierigkeiten nicht gesorgt wird, dann kann der Rechner auch mit dem vorteilhaftesten Stab wenig ausrichten. Er ist gezwungen, die Ausleihtage umständlich mit dem Kalender zu ermitteln, Formeln ausfindig zu machen und wenn notwendig umzuformen, den Stellenwert zu bestimmen und letzten Endes das Resultat mit den Skalen C, D zu errechnen, weil ihm die Rechendurchführung auf eigens für diesen Zweck hergerichteten Stäben unbekannt ist. Will man also die vom Stabhersteller beabsichtigten Vorteile ausnutzen, dann muß man durch geeignete Hilfsmittel dafür Sorge tragen, daß dies möglich ist.

Die folgende Rechenübersicht ist als Hilfsmittel so gestaltet worden, daß der Rechner jeden vorkommenden Rechenfall ohne Schwierigkeiten behandeln kann. Sie erleichtert ihm die Ermittlung der Ausleihtage t, hilft den Stellenwert bestimmen und ermöglicht die sonst kaum durchführbare Berechnung am Stab.

T 1 Berechnung der Ausleihtage t, wenn das Jahr mit 360 Tagen angenommen wird

	Jän	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez	Jän	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
1.	719	689	659	629	599	569	539	509	479	449	419	389	359	329	299	269	239	209	179	149	119	89	59	29
2.	718	688	658	628	598	568	538	508	478	448	418	388	358	328	298	268	238	208	178	148	118	88	58	28
3.	717	687	657	627	597	567	537	507	477	447	417	387	357	327	297	267	237	207	177	147	117	87	57	27
4.	716	686	656	626	596	566	536	506	476	446	416	386	356	326	296	266	236	206	176	146	116	86	56	26
5.	715	685	655	625	595	565	535	505	475	445	415	385	355	325	295	265	235	205	175	145	115	85	55	25
6.	714	684	654	624	594	564	534	504	474	444	414	384	354	324	294	264	234	204	174	144	114	84	54	24
7.	713	683	653	623	593	563	533	503	473	443	413	383	353	323	293	263	233	203	173	143	113	83	53	23
8.	712	682	652	622	592	562	532	502	472	442	412	382	352	322	292	262	232	202	172	142	112	82	52	22
9.	711	681	651	621	591	561	531	501	471	441	411	381	351	321	291	261	231	201	171	141	111	81	51	21
10.	710	680	650	620	590	560	530	500	470	440	410	380	350	320	290	260	230	200	170	140	110	80	50	20
11.	709	679	649	619	589	559	529	499	469	439	409	379	349	319	289	259	229	199	169	139	109	79	49	19
12.	708	678	648	618	588	558	528	498	468	438	408	378	348	318	288	258	228	198	168	138	108	78	48	18
13.	707	677	647	617	587	557	527	497	467	437	407	377	347	317	287	257	227	197	167	137	107	77	47	17
14.	706	676	646	616	586	556	526	496	466	436	406	376	346	316	286	256	226	196	166	136	106	76	46	16
15.	705	675	645	615	585	555	525	495	465	435	405	375	345	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15
16.	704	674	644	614	584	554	524	494	464	434	404	374	344	314	284	254	224	194	164	134	104	74	44	14
17.	703	673	643	613	583	553	523	493	463	433	403	373	343	313	283	253	223	193	163	133	103	73	43	13
18.	702	672	642	612	582	552	522	492	462	432	402	372	342	312	282	252	222	192	162	132	102	72	42	12
19.	701	671	641	611	581	551	521	491	461	431	401	371	341	311	281	251	221	191	161	131	101	71	41	11
20.	700	670	640	610	580	550	520	490	460	430	400	370	340	310	280	250	220	190	160	130	100	70	40	10
21.	699	669	639	609	579	549	519	489	459	429	399	369	339	309	279	249	219	189	159	129	99	69	39	9
22.	698	668	638	608	578	548	518	488	458	428	398	368	338	308	278	248	218	188	158	128	98	68	38	8
23.	697	667	637	607	577	547	517	487	457	427	397	367	337	307	277	247	217	187	157	127	97	67	37	7
24.	696	666	636	606	576	546	516	486	456	426	396	366	336	306	276	246	216	186	156	126	96	66	36	6
25.	695	665	635	605	575	545	515	485	455	425	395	365	335	305	275	245	215	185	155	125	95	65	35	5
26.	694	664	634	604	574	544	514	484	454	424	394	364	334	304	274	244	214	184	154	124	94	64	34	4
27.	693	663	633	603	573	543	513	483	453	423	393	363	333	303	273	243	213	183	153	123	93	63	33	3
28.	692	662	632	602	572	542	512	482	452	422	392	362	332	302	272	242	212	182	152	122	92	62	32	2
29.	691	661	631	601	571	541	511	481	451	421	391	361	331	301	271	241	211	181	151	121	91	61	31	1
30.	690	660	630	600	570	540	510	480	450	420	390	360	330	300	270	240	210	180	150	120	90	60	30	0

Für jedes Datum erhält man eine Zahl; sie heißt a für das Ausleihdatum A und r für das Rückgabedatum R.
Die Zählung der Ausleihtage beginnt mit dem 1. Tag: $t = a - r + 1$
Die Zählung der Ausleihtage beginnt mit dem 2. Tag: $t = a - r$

T 2 Berechnung der Ausleihtage t, wenn das Jahr mit 365 Tagen angenommen wird

	Jän	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez	Jän	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
1.	730	699	671	640	610	579	549	518	487	457	426	396	365	334	306	275	245	214	184	153	122	92	61	31
2.	729	698	670	639	609	578	548	517	486	456	425	395	364	333	305	274	244	213	183	152	121	91	60	30
3.	728	697	669	638	608	577	547	516	485	455	424	394	363	332	304	273	243	212	182	151	120	90	59	29
4.	727	696	668	637	607	576	546	515	484	454	423	393	362	331	303	272	242	211	181	150	119	89	58	28
5.	726	695	667	636	606	575	545	514	483	453	422	392	361	330	302	271	241	210	180	149	118	88	57	27
6.	725	694	666	635	605	574	544	513	482	452	421	391	360	329	301	270	240	209	179	148	117	87	56	26
7.	724	693	665	634	604	573	543	512	481	451	420	390	359	328	300	269	239	208	178	147	116	86	55	25
8.	723	692	664	633	603	572	542	511	480	450	419	389	358	327	299	268	238	207	177	146	115	85	54	24
9.	722	691	663	632	602	571	541	510	479	449	418	388	357	326	298	267	237	206	176	145	114	84	53	23
10.	721	690	662	631	601	570	540	509	478	448	417	387	356	325	297	266	236	205	175	144	113	83	52	22
11.	720	689	661	630	600	569	539	508	477	447	416	386	355	324	296	265	235	204	174	143	112	82	51	21
12.	719	688	660	629	599	568	538	507	476	446	415	385	354	323	295	264	234	203	173	142	111	81	50	20
13.	718	687	659	628	598	567	537	506	475	445	414	384	353	322	294	263	233	202	172	141	110	80	49	19
14.	717	686	658	627	597	566	536	505	474	444	413	383	352	321	293	262	232	201	171	140	109	79	48	18
15.	716	685	657	626	596	565	535	504	473	443	412	382	351	320	292	261	231	200	170	139	108	78	47	17
16.	715	684	656	625	595	564	534	503	472	442	411	381	350	319	291	260	230	199	169	138	107	77	46	16
17.	714	683	655	624	594	563	533	502	471	441	410	380	349	318	290	259	229	198	168	137	106	76	45	15
18.	713	682	654	623	593	562	532	501	470	440	409	379	348	317	289	258	228	197	167	136	105	75	44	14
19.	712	681	653	622	592	561	531	500	469	439	408	378	347	316	288	257	227	196	166	135	104	74	43	13
20.	711	680	652	621	591	560	530	499	468	438	407	377	346	315	287	256	226	195	165	134	103	73	42	12
21.	710	679	651	620	590	559	529	498	467	437	406	376	345	314	286	255	225	194	164	133	102	72	41	11
22.	709	678	650	619	589	558	528	497	466	436	405	375	344	313	285	254	224	193	163	132	101	71	40	10
23.	708	677	649	618	588	557	527	496	465	435	404	374	343	312	284	253	223	192	162	131	100	70	39	9
24.	707	676	648	617	587	556	526	495	464	434	403	373	342	311	283	252	222	191	161	130	99	69	38	8
25.	706	675	647	616	586	555	525	494	463	433	402	372	341	310	282	251	221	190	160	129	98	68	37	7
26.	705	674	646	615	585	554	524	493	462	432	401	371	340	309	281	250	220	189	159	128	97	67	36	6
27.	704	673	645	614	584	553	523	492	461	431	400	370	339	308	280	249	219	188	158	127	96	66	35	5
28.	703	672	644	613	583	552	522	491	460	430	399	369	338	307	279	248	218	187	157	126	95	65	34	4
29.	702		643	612	582	551	521	490	459	429	398	368	337		278	247	217	186	156	125	94	64	33	3
30.	701		642	611	581	550	520	489	458	428	397	367	336		277	246	216	185	155	124	93	63	32	2
31.	700		641		580		519	488		427		366	335		276		215		154	123		62		1

Für jedes Datum erhält man eine Zahl; sie heißt a für das Ausleihdatum A und r für das Rückgabedatum R.
Die Zählung der Ausleihtage beginnt mit dem 1. Tag: $t = a - r + 1$
Die Zählung der Ausleihtage beginnt mit dem 2. Tag: $t = a - r$

T 3 Stellenwertbestimmung für Z, K und p

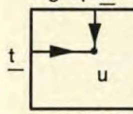
Im Schnittpunkt von K und t ergibt sich der Wert u

	K (Kapital)																									
t Tage	10	16	25	40	63	100	160	250	400	630	1000	1600	2500	4000	6300	10000	16000	25000	40000	63000	100000	160000	250000	400000	630000	1000000
1									0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30
1,6								0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40
2,5							0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70
4						0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100
6,3					0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200
10				0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300
16			0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400
25		0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400	700
40	0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400	700	1000
63	0,02	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400	700	1000	2000
100	0,03	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400	700	1000	2000	3000
160	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400	700	1000	2000	3000	4000
250	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400	700	1000	2000	3000	4000	7000
400	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	3	4	7	10	20	30	40	70	100	200	300	400	700	1000	2000	3000	4000	7000	10000

Stellenwertbestimmung von

Z

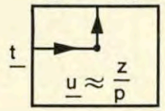
Fig. 2 K



gesucht $Z \approx up$

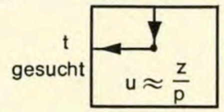
K

Fig. 3 K (gesucht)



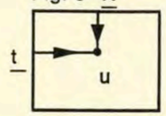
t

Fig. 4 K



p

Fig. 5 K



gesucht $p \approx \frac{Z}{u}$

Die Fig. 2 bis 5 demonstrieren, wie man aus der Tafel T 3 die Stellenwerte für Z, K, t und p erhält. Alle unterstrichenen Werte sind Ausgangswerte.
Werte wie $Z \approx u\,p$, $p \approx Z/u$ und $u \approx Z/p$ ermittelt man durch Kopfrechnung.

T 4 Berechnung der Tageszinsen

Berechnung von	Gegeben		Berechnung der Tageszinsen mit Hilfe der Stäbe Disponent 111/22 und Bivius 1/28	Teiler D[1)]
Z	K p A R	1)	Berechnung von t siehe T 1, T 2	
		2)	Stellenwertbestimmung von Z siehe T 3, Fig. 2	
		3)	„360" $Z = \frac{Kpt}{36\,000}$ DFK/Clp Ct/DZ	$Z = \frac{Kt}{D_1}$
			„365" $Z = \frac{Kpt}{36\,500}$ DFK/L k/Clp Ct/DZ	$Z = \frac{Kt}{D_2}$
K	Z p A R	1)	Berechnung von t siehe T 1, T 2	
		2)	Stellenwertbestimmung von K siehe T 3, Fig. 3	
		3)	„360" $K = \frac{36\,000\,Z}{pt}$ DZ/Ct Clp/DFK	$K = \frac{Z\,D_1}{t}$
			„365" $K = \frac{36\,500\,Z}{pt}$ DZ/Ct Clp/k L/DFK	$K = \frac{Z\,D_2}{t}$
t	K Z p	1)	Stellenwertbestimmung von t siehe T 3, Fig. 4	
		2)	„360" $t = \frac{36\,000\,Z}{Kp}$ DZ/CFK Clp/Dt	$t = \frac{Z\,D_1}{K}$
			„365" $t = \frac{36\,500\,Z}{Kp}$ DZ/CFK Clp/k L/Dt	$t = \frac{Z\,D_2}{K}$
p	K Z A R	1)	Berechnung von t siehe T 1, T 2	
		2)	Stellenwertbestimmung von p siehe T 3, Fig. 5	
		3)	„360" $p = \frac{36\,000\,Z}{Kt}$ DZ/CFK Clt/Dp	$D_1 = \frac{Kt}{Z}$
			„365" $p = \frac{36\,500\,Z}{Kt}$ DZ/CFK Clt/k L/Dp	$D_2 = \frac{Kt}{Z}$

1) Siehe T 6

T 5 Berechnung der Monats- und Jahreszinsen

Berechnung von	Berechnung der Monatszinsen	Berechnung der Jahreszinsen
Z	$Z = \frac{Kpt}{1200}$	$Z = \frac{Kpt}{100}$
K	$K = \frac{1200\,Z}{pt}$	$K = \frac{100\,Z}{pt}$
t	$t = \frac{1200\,Z}{Kp}$	$t = \frac{100\,Z}{Kp}$
p	$p = \frac{1200\,Z}{Kt}$	$p = \frac{100\,Z}{Kt}$

T 6 Teiler D_1 und D_2

p %	D_1 „360"	D_2 „365"	p %	D_1 „360"	D_2 „365"
$^1/_8$	288 000	292 000	$6^1/_4$	5 760	5 840
$^1/_4$	144 000	146 000	$6^1/_2$	5 538	5 615
$^1/_2$	72 000	73 000	$6^3/_4$	5 333	5 407
$^3/_4$	48 000	48 666,7	7	5 143	5 214
1	36 000	36 500	$7^1/_4$	4 966	5 035
$1^1/_4$	28 800	29 200	$7^1/_2$	4 800	4 867
$1^1/_2$	24 000	24 333,3	$7^3/_4$	4 645	4 710
$1^3/_4$	20 511	20 857	8	4 500	4 563
2	18 000	18 250	$8^1/_4$	4 364	4 424
$2^1/_4$	16 000	16 222	$8^1/_2$	4 235	4 294
$2^1/_2$	14 400	14 600	$8^3/_4$	4 114	4 171
$2^3/_4$	13 091	13 273	9	4 000	4 056
3	12 000	12 167	$9^1/_4$	3 892	3 946
$3^1/_4$	11 077	11 231	$9^1/_2$	3 789	3 842
$3^1/_2$	10 286	10 429	$9^3/_4$	3 692	3 744
$3^3/_4$	9 600	9 733	10	3 600	3 650
4	9 000	9 125	$10^1/_2$	3 429	3 476
$4^1/_4$	8 471	8 588	11	3 273	3 318
$4^1/_2$	8 000	8 111	$11^1/_2$	3 130	3 174
$4^3/_4$	7 579	7 684	12	3 000	3 042
5	7 200	7 300	$12^1/_2$	2 880	2 920
$5^1/_4$	6 857	6 952	13	2 762	2 808
$5^1/_2$	6 545	6 636	$13^1/_2$	2 667	2 704
$5^3/_4$	6 261	6 348	14	2 571	2 607
6	6 000	6 083	15	2 400	2 433

Zinsen sind eine Vergütung für leihweise überlassenes Kapital. Sie werden berechnet für Tage, Monate und Jahre. Für die am häufigsten vorkommende Tageszinsenberechnung enthalten die Stäbe „Disponent" 111/22, Schul-Disponent 57/22 und „Bivius" 1/28 ein Skalenpaar DF und CF, deren Skalenwerte am Anfang und Ende der Skalen 36 betragen; außerdem auf dem Läufer die Läuferstriche L und k; die Anordnung der Skalen und Läuferstriche dieser Stäbe ersieht man aus Abb. 1.

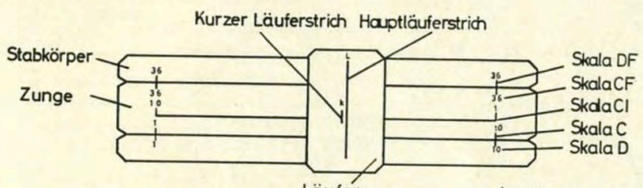


Abb. 1

Für die Erläuterung der Rechendurchführung auf den Stäben „Disponent", Schul-Disponent und „Bivius" wird in dieser Arbeit eine Methode verwendet, die darin besteht, daß die einzelnen Koinzidenzen nicht mit Worten, sondern mit Hilfe von Symbolen festgehalten werden. Unter Koinzidenz versteht man das Zusammenfallen zweier Skalenwerte auf je einer Skala. Soll z. B. der Skalenwert 2 auf der D-Skala mit dem Skalenwert 3 auf der C-Skala zusammenfallen (koinzidieren), so schreibt man diese Koinzidenz wie folgt an: D2/C3. Der Strich / ist das Symbol der Koinzidenz. Die meisten Rechendurchführungen benötigen mehr als eine Koinzidenz, die nebeneinander angeschrieben werden, z. B. DFK/L k/Clp Ct/DZ. Diese Niederschrift bedeutet: Über den Skalenwert K

auf der DF-Skala stelle den Läuferstrich L (1. Koinzidenz); unter den Läuferstrich k stelle den Skalenwert p auf der Cl-Skala (2. Koinzidenz); unter dem Skalenwert t auf der C-Skala liest man auf der D-Skala das Resultat Z ab (3. Koinzidenz).

Für die Berechnung der Tageszinsen gibt es zwei Möglichkeiten (siehe T4):

1. Mit den Skalen DF und CF auf den Stäben „Disponent", Schul-Disponent und „Bivius". Sie ist die naheliegendste Zinsenberechnung und für jeden Zinsfuß geeignet.
2. Mit Hilfe der Teiler D_1 und D_2; sie kann auf jedem Stab durchgeführt werden, ist aber nicht für jeden beliebigen Zinsfuß geeignet.

Die Berechnung der Monats- und Jahreszinsen entnimmt man aus T5.

Bedeutung der Zeichen

Z	=	Zinsen
K	=	Kapital
p	=	Zinsfuß in %
t	=	Ausleihdauer in Tagen, Monaten oder Jahren
D_1	=	36000/p Teiler
D_2	=	36500/p Teiler
A	=	Ausleihdatum
R	=	Rückgabedatum
a	=	Zahl, die dem Ausleihdatum entspricht (siehe T1, T2)
r	=	Zahl, die dem Rückgabedatum entspricht (siehe T1, T2)
„360"	=	das Jahr wird mit 360 Tagen angenommen
„365"	=	das Jahr wird mit 365 Tagen angenommen
I	=	die Zählung der Tage beginnt mit dem 1. Tag
II	=	die Zählung der Tage beginnt mit dem 2. Tag
?	=	gesucht

B e i s p i e l e

1. K = 200 000 p = 6% A = 15. 6. R = 27. 1. „360" II ?Z
   t = 222 Tage Z ≈ 6000 DF 2/CI 6 C 222/DZ = 7400
2. K = 7000 p = 4% A = 24. 3. R = 18. 10. „365" I ?Z
   t = 209 Tage Z ≈ 160 DF 7/L k/CI 4 C 209/DZ = 160
3. Z = 13,1 p = 7,5% A = 25. 12. R = 2. 7. „360" I ?K
   t = 188 Tage K ≈ 400 D 131/C 185 CI 75/DFK = 335
4. K = 675 000 p = 4,75% A 7. 6. R = 12. 1. „360" die Zählung der Ausleihtage beginnt mit dem auf den Ausleihtag folgenden Ersten; ?Z
   t = 191 Tage Z ≈ 15 000 DF 675/CI 475 C 191/DZ = 17 000
5. K = 1 000 000 p = 5,75% Z = 6390 „360" ?t
   t ≈ 40 Tage C 639/CF 1 CI 575/Dt = 40
6. K = 5400 p = 4,5% Z = 97,9 „360" ?t

   $$t \approx 100 \text{ Tage} \quad t = \frac{Z \cdot D_1}{K} = \frac{97{,}9 \cdot 8000}{5400} = 145$$

7. K = 12 500 p = 6,25% t = 2 Jahre ?Z

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} = \frac{12500 \cdot 6{,}25 \cdot 2}{100} = 1562$$

Anschließend sei noch bemerkt, daß auch die Castell Doppel-Rechenstäbe 2/82, 2/83 und 52/82 bei Benutzung der Läufermarke k' = 3,6 über den Skalen CF, DF für die Zinsenberechnung geeignet sind. Es gilt hierbei das Rechenschema: DF K/k'; L/CI p; C t/DZ

Grundanwendungen des Funktionenschiebers 1080

nach Dr. Th. Marzani

Der von Faber-Castell erzeugte **Funktionenschieber 1080,** ein vielseitiges Demonstrationsgerät für den Mathematik- und Physikunterricht, wird seit einigen Jahren an zahlreichen Lehranstalten der Bundesrepublik und des Auslandes mit viel Erfolg verwendet. Obwohl die beigegebene umfangreiche Anleitung eine außerordentlich große Anzahl von Anwendungen bespricht, konnten doch nicht alle bemerkenswerten Möglichkeiten behandelt werden. Im Rahmen der Rechenstab-Briefe soll versucht werden, den wiederholt geäußerten Wünschen nach Hinweisen auf weitere Anwendungen des Gerätes durch gelegentliche Kurzbeiträge in kleinen Schritten entgegenzukommen. Zunächst sollen jedoch kurze Andeutungen der Grundanwendungen in diesem und im nächsten Heft den Funktionenschieber jenen Lesern vorstellen, die ihn noch nicht aus Lehrmittelausstellungen oder Fachzeitschriften kennen.

Abb. 1 zeigt eine Gesamtansicht des Funktionenschiebers (als Unterlage dient die Kiste, in welche sich das Gerät samt allem Zubehör verpacken läßt). Wesentlicher Bestandteil ist die **Streifenserie:** 131 Streifen, deren Schmalseiten sich zu einer **geschlossenen Zeichenebene** zusammenfügen, sind in ihrer Längsrichtung frei beweglich und dienen sich bei jeder Bewegung gegenseitig als „Führung". Die Streifenserie ist wendbar und beiderseits mit fixen Auftragungen versehen. In Abb. 1 ist die **Seite a** zu sehen (durch „Schablonenüberlagerung" verzerrt), welche in einem der nächsten Rechenstab-Briefe kurz besprochen werden soll. Abb. 2 bis Abb. 5 zeigen die **Seite b.** Aus der sorgfältigen weiteren Ausstattung sei zunächst nur der **Läufer** hervorgehoben (Abb. 1). Sein Rahmen ist lotrecht, seine transparente **Koordinatenscheibe** zudem waagrecht verschiebbar.

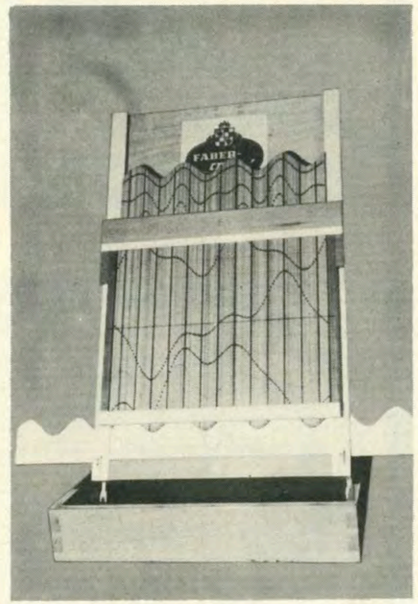


Abb. 1

1. Grundanwendungen zu Seite b der Streifenserie:

Abb. 1 bis 5 sind verkleinerte Photos aus der Anleitung (zur Erläuterung von Beispielen sind waagrechte Achsen, Buchstaben und Ziffern eingetragen, die nicht zu den fixen Auftragungen gehören). In Abb. 3 ruht die Streifenserie in **Grundstellung** auf einem Stab. Wird der Stab auf einer Seite angehoben (auf der rechten Seite in Abb. 2, auf der linken Seite in Abb. 4 und 5), so wird jeder Streifen in Längsrichtung (lotrecht) bewegt und damit auch jeder Punkt der aufgetragenen Linien und Figuren: **Die ganze Zeichenebene wird transformiert.** Die Transformation kann langsam in **fortlaufender Bewegung**

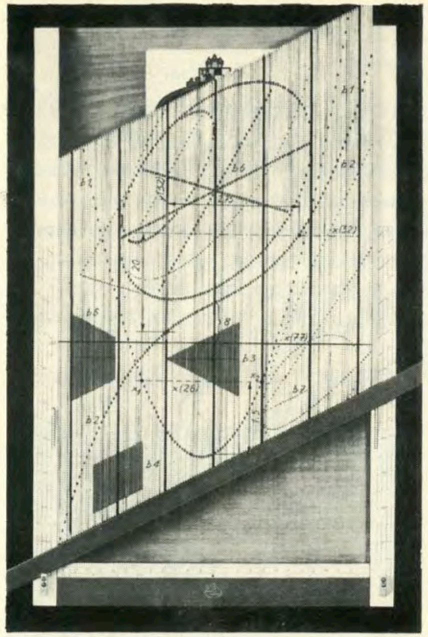


Abb. 2

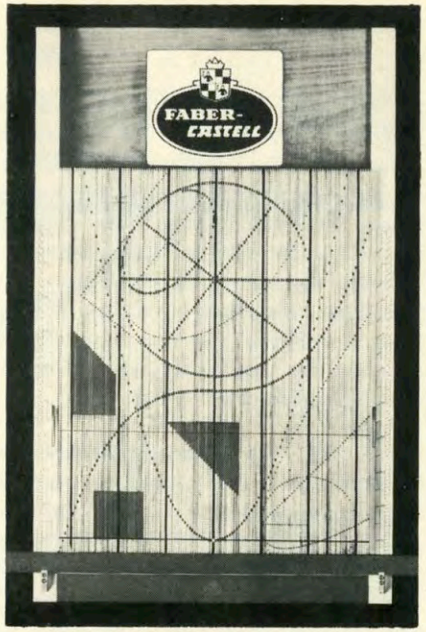
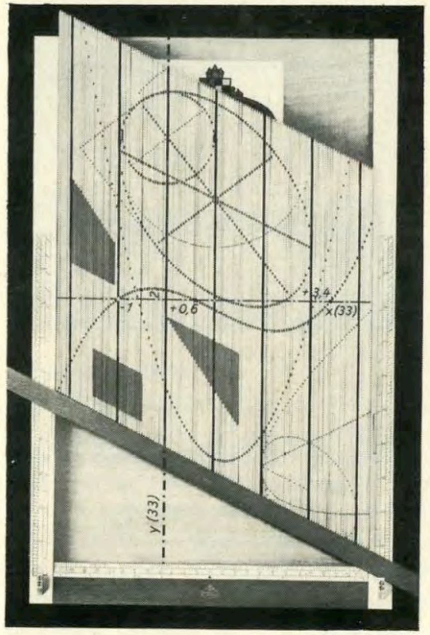


Abb. 3



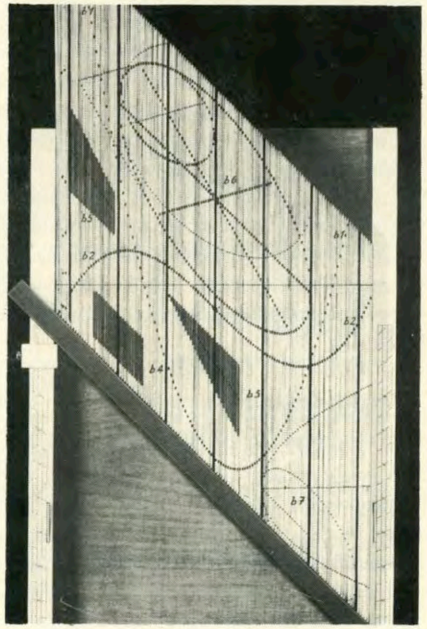


Abb. 4

Abb. 5

vorgeführt werden, jede Stellung läßt sich fixieren. Die Gesamtfläche besteht stets aus denselben Schmalseiten der Streifen, jede Figur stets aus denselben Stücken solcher Streifen. Der Flächeninhalt einer Figur bleibt daher stets erhalten (invariant), die Transformation ist **flächentreu.** Weiters erkennen wir: **Eine gerade Linie geht stets wieder in eine gerade Linie über** (eine Strecke jedoch im allgemeinen in eine Strecke anderer Richtung und Länge).

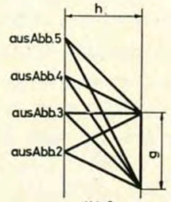


Abb.6

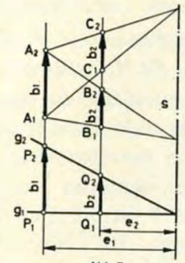


Abb.7

1.1 Elementare Flächenverwandlung durch Scherung: Die Figuren, welche in den Abbildungen dunkelgrau erscheinen, sind am Gerät flächenhaft rot aufgetragen. Wir betrachten etwa die Verwandlung des **Dreiecks** von Abb. 2 bis Abb. 5. Pausen wir die Figuren der verschiedenen Stellungen so zusammen, daß sich die lotrechten Seiten decken (diese Seite ist ein Streifenstück, also stets gleich lang), so erhalten wir Abb. 6 (am Gerät verwenden wir die Koordinatenscheibe des Läufers, auf die mit Spezialstiften gezeichnet werden kann). Betrachten wir die gemeinsame Seite g als **„Grundlinie"**, so erscheint die Gegenecke parallel dazu verschoben, wobei die **„Höhe"** h (Abstand der Streifen) unverändert bleibt. Sehr einprägsam ist es auch, nur zwei Stellungen zu pausen und sodann neuerlich den Übergang in fortlaufender Bewegung zu demonstrieren. Entsprechend kann die Flächenverwandlung des **Parallelogramms** (in Abb. 3 als Rechteck) bzw. des **Trapezes** (in Abb. 2 gleichschenkelig) eindringlich dargestellt werden. Es lassen sich damit auch Demonstrationen zum Begriff der **Schwerlinien** verbinden.

1.2 Affine Transformation der Ebene im stetigen Übergang: Die in Abb. 6 dargestellte Scherung ist eine besondere **perspektive Affinität, deren Affinitätsachse s zu den Affinitätsstrahlen (Schiebestrahlen) parallel ist** (Abb. 7). Für alle Punkte eines Schiebestrahles gilt dieselbe **Schiebestrecke.** Die Schiebestrecken der Schiebestrahlen und ihre Abstände von der Achse sind proportional ($b_1 : b_2 = e_1 : e_2$). **Es ist für das Verständnis des Abbildungsbegriffes von besonderer Bedeutung, daß am Funktionenschieber eine n i c h t kongruente Abbildung in der Ebene im s t e t i g e n Ü b e r g a n g demonstriert werden kann** (als „Bewegung" in einem allgemeineren Sinne).

1.3 Ellipse als affine Linie des Kreises: Abb. 3 zeigt einen **Kreis** mit zwei Paaren konjugierter Durchmesser (am Gerät sind der lotrechte und der waagrechte Durchmesser rot, das andere Paar ist schwarz). Außerdem ist ein von zwei Halbmessern und den zugehörigen Tangenten eingeschlossenes Quadrat zu erkennen. In Abb. 2, 4, 5 ergeben sich daraus jeweils zwei Paare **konjugierter Durchmesser der Ellipse.** In Abb. 4 wird das schwarze Paar insbesondere zum **Achsenpaar.** Aus dem Flächenverhältnis $r^2 : r^2\pi = 1 : \pi$ von Quadrat und Kreisfläche, das bei der Transformation invariant bleibt, folgen die **Flächenformeln der Ellipse:** $F = a \cdot b \cdot \pi$ (Halbachsen a und b) bzw. $F = c \cdot d \cdot \pi \cdot \sin\varphi$ (konjugierte Halbmesser c und d, die den Winkel φ einschließen). Erwähnt sei noch, daß der **Hauptscheitel-Krümmungskreis** der Ellipse in Abb. 4 in der Grundstellung Abb. 3 als Ellipse erscheint mit dem großen Kreis als **Nebenscheitel-Krümmungskreis.** In Abb. 2 und Abb. 5 erscheinen die beiden Linien als oskulierende Ellipsen.

1.4 Ganzrationale Funktionen und algebraische Gleichungen: Mit dem **Läufer** läßt sich über die Zeichenfläche ein **Koordinatensystem** legen, dessen **y-Achse** sich mit dem **Mittelstreifen** deckt (Grundstellung der Koordinatenscheibe im Läuferrahmen). Außer dem Mittelstreifen (y-Achse) sind noch die Streifen für $x = -3, -2, -1, +1, +2, +3$ durch dunklere Färbung hervorgehoben (auf eine Einheitsstrecke entfallen 20 Streifen). Die **x-Achse** wird durch vertikales Verschieben des Läufers nach Bedarf eingestellt. In den Abbildungen 2 bis 5 ist der Läufer weggelassen, damit jeweils alle Auftragungen überblickt werden können. Als Ersatz sind einige x-Achsen eingezeichnet [für verschiedene Musterbeispiele der Anleitung gekennzeichnet, z. B. x(77) und x(26) in Abb. 2].

1.41 Die **Parabel 2. Ordnung** in Abb. 3 stellt für die Achse x(o) die **Funktion** $y = x^2$ dar, für x(25) hingegen die Funktion $y = x^2 - 2{,}25$, weil der Scheitel nun die Ordinate $y_0 = 2{,}25$ hat. Allgemein: Für die **Funktion** $\mathbf{y = f(x)}$ wird die x-Achse so eingestellt, daß der **Punkt im Mittelstreifen** die **Ordinate** $\mathbf{y_0 = f(o)}$ hat [bei $y = x^2 + b$ also $y_0 = b$]. Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse ergeben mit großer Genauigkeit die **Nullstellen** $x_1 = -1{,}5$ und $x_2 = +1{,}5$ der **Funktion** $y = x^2 - 2{,}25$ bzw. die **Wurzeln der rein quadratischen Gleichung** $x^2 - 2{,}25 = 0$.

1.42 Wird der Stab angehoben, so wird jeder auf der Streifenserie dargestellten Funktion die **lineare Funktion** $\mathbf{y = k \cdot x}$ **additiv überlagert** (vom konstanten Glied abgesehen), z. B. $y = 0{,}5\,x$ in Abb. 2, $y = -0{,}5\,x$ in Abb. 4, $y = -x$ in Abb. 5. **Steigungsskalen** an den Randleisten des Gerätes gestatten das genaue Einstellen der Steigung k (rechts für positives, links für negatives k). Die besprochene Parabel wird damit zum Bild der **Funktion** $\mathbf{y = x^2 + a\,x + b}$, wenn der **Stab** die **Steigung** $\mathbf{k = a}$ einnimmt und die x-Achse so eingestellt wird, daß der Punkt im Mittelstreifen die **Ordinate** $\mathbf{y_0 = b}$ besitzt. Die Nullstellen ergeben die **Wurzeln der gemischt quadratischen Gleichung** $x^2 + a\,x + b = 0$ mit überraschender Genauigkeit an.

1\. Beispiel: Bild 2, $x^2 + 0{,}5\,x - 1{,}5 = 0$; Funktion $y = x^2 + 0{,}5\,x - 1{,}5$ mit Achse x(26), $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 1$.

2\. Beispiel: Bild 5, $x^2 - x - 3{,}55 = 0$; Funktion $y = x^2 - x - 3{,}55$ mit Achse x(78), $x_1 \approx -1{,}45$, $x_2 \approx +2{,}45$.

1.43 Die Parabeln 2. Ordnung in Abb. 2 bis Abb. 5 haben dieselbe Gestalt. **Die Parabel 2. Ordnung wird durch die lineare Überlagerung nur parallel verschoben.** Dabei beträgt die seitliche Verschiebung [„Phase"] $-a/2$, z. B. $-0{,}25$ in Abb. 2, $+0{,}5$ in Abb. 5. Man zeigt dies eindringlich, indem man eine auf die Koordinatenscheibe gepauste Parabel jeweils durch Verschieben mit der transformierten Parabel zur Deckung bringt. Konzentriert man sich auf die Gestalt der Parabel (nicht auf ihre Lageänderung), so beobachtet man bei fortlaufender Bewegung des Stabes, daß die Kurve als Ganzes ihre Gestalt behält, jedoch die **Punkte sich längs der Kurve bewegen.**

1.44 Die **Parabel 3. Ordnung** in Abb. 3 stellt die Funktion $\mathbf{y = x^3 + c}$ dar [mit x-Achse für $y_0 = c$], wobei die **Ordinaten und Steigungen z e h n f a c h zählen** (Ordinaten erscheinen im Funktionsbild 1:10 verkürzt). Durch lineare Überlagerung [„Stabüberlagerung"] wird daraus das Bild der Funktion $\mathbf{y = x^3 + b\,x + c}$. Ihre **Nullstellen** ergeben die **Wurzeln der reduzierten kubischen Gleichung** $\mathbf{x^3 + b\,x + c = 0}$.

1\. Beispiel: Bild 2: Gleichung: $x^3 + 5\,x + 8 = 0$, Funktion: $y = x^3 + 5\,x + 8$ [mit x(77)], $x_1 \approx -1{,}23$, $x_{2,3}$ nicht reell.

2\. Beispiel: Bild 5: Gleichung: $x^3 - 10\,x - 5 = 0$, Funktion: $y = x^3 - 10\,x - 5$ [mit x(78)], $x_1 \approx -2{,}9$, $x_2 \approx -0{,}5$, $x_3 \approx +3{,}4$ (knapp außerhalb).

1.45 Durch **Parallelverschiebung des Achsensystems [„Phasenverschiebung"** der Koordinatenscheibe im Läuferrahmen] läßt sich durch dieselbe Grundkurve die

Funktion $\mathbf{y = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c}$ darstellen bzw. die

allgemeine kubische Gleichung $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$ graphisch lösen [siehe die leicht verständliche Erklärung in der Anleitung, S. 25/26].

Beispiel: Bild 4: $x^3 - 3\,x^2 - 2\,x + 2 = 0$ bzw. $y = x^3 - 3\,x^2 - 2\,x + 2$ [mit x(33)];

„Phase" $a/3 = -1$ [also Achse y(33) im nächsten dunklen Streifen links vom Mittelstreifen]; **Stabüberlagerung** $k = b - a^2/3 = -2 - 9/3 = -2 - 3 = -5$;

x-Achse mit Ordinate $y_0 = 2$ für y(33);

Wurzeln bzw. Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = +0{,}6$, $x_3 = +3{,}4$.

Bei sehr großen Koeffizienten ergibt eine Koordinatentransformation eine einstellbare Gleichung bzw. Funktion. Z. B. wird $x^3 - 12x^2 + 400x - 4800 = 0$ mit $x = 10\,\bar{x}$ zu $\bar{x}^3 - 1{,}2\,\bar{x}^2 + 4\,\bar{x} - 4{,}8 = 0$.

1.46 Erwähnt sei noch, daß der Funktionenschieber eine lehrreiche, überraschend rationelle Methode zur graphischen Lösung der **allgemeinen Gleichung 4. Grades** $x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ bietet [Schnittpunkte einer kubischen Parabel mit einer gleichseitigen Hyperbel; § 13 der Anleitung].